

Mathematikunterricht liefert Antworten – auf welche Fragen?

Zusammenfassung

Wenn Mathematikunterricht in der Schule die Antwort ist, was war dann die Frage? Was ist das primäre Ziel von Mathematikunterricht in der Schule? Ich behaupte, das primäre Ziel muss sein, die Frage zu beantworten, **was Mathematik ist**. Und daraus folgt (A), dass es nicht ein Ziel gibt, sondern mindestens drei, und (B), dass es sich dabei um bewegliche Ziele handelt.

Es geht also darum, Mathematik darzustellen und einzuführen als

Wissensgebiet: Mathematik als wichtiger Teil unserer Kultur, voller Entdeckungen, Ideen, Einsichten, Probleme und Problemlösungen über Tausende von Jahren, auch als Basis für moderne Schlüsseltechnologien, der Antworten liefert auf sehr grundlegende und natürliche Fragen.

Werkzeugkasten: Mathematik als ein Gebiet, das jeden mit Handwerkszeug ausstattet, um wichtige Probleme im täglichen Leben *selbst* zu lösen.

Wissenschaft: Mathematik als lebendiges Forschungsgebiet, in dem Probleme gelöst, Strukturen verstanden und Ideen entwickelt werden.

All diese Aspekte sind lebendig, sie entwickeln und verändern sich mit der Zeit. Wenn also Mathematiklehrpläne für die Schule entworfen werden, dann müssen wir aufpassen, dass sich die Fragen nicht schon grundlegend verändert haben, wenn der Zeitpunkt kommt, dass unsere Antworten implementiert werden . . .

1 Meine Perspektive

Wenn Mathematikunterricht in der Schule die Antwort ist, was war dann die Frage? Was ist das primäre Ziel von Mathematikunterricht in der Schule?

Man hat mich gebeten, meine Sicht des Mathematik-Schulunterrichts zu präsentieren. Um meine *Sicht* auf die Dinge plausibel zu machen, sollte ich vielleicht erst meine *Perspektive* erläutern.

Ich bin Forschungsmathematiker, bin schon seit mehr als 15 Jahren Universitätsprofessor. Ich habe für meine Forschung Preise bekommen, aber nicht an Schulausbildung oder Didaktik gearbeitet. Also sehe ich die Mathematik-Schulausbildung aus einer Universitätsperspektive. Und ich werde daher primär über *Inhalte* reden, nicht über die *Mechanismen* von Schulunterricht. Sie werden aber sehen, dass nach meiner Meinung in der großen Vielfalt von Gründen, warum Schulunterricht in Mathematik so oft scheitert, und so sehr scheitert (und offenbar in sehr vielen Ländern), die *Inhalte* eine wesentliche Komponente darstellen.

Als Mathematikprofessor, der immer wieder mal Grundvorlesungen für Studierende der ersten Semester hält, werde ich mit den Ergebnissen von Mathematikunterricht konfrontiert, die unsere Studenten als Ausrüstung aus der Schule mitbringen.

Meine Zusammenfassung lautet: **Wir sind nicht zufrieden**. Ich nehme an, dass das niemanden überrascht. Es geht mir dabei auch gar nicht um Schuldzuweisungen, sondern zunächst um eine Beschreibung der Situation aus Universitätsperspektive. Die Tatsache, dass die Studenten, die versuchen, bei uns an der Universität Mathematik oder eine Naturwissenschaft zu studieren, als Ergebnis ihrer Schulausbildung einfach zu wenig Mathematikwissen mitbringen, ist aber nur *eine* Komponente meiner und unserer Unzufriedenheit. Wir sind mehrfach unzufrieden. Hier ist meine Diagnose:

1. Problem: Unzureichendes Wissen

Die Studenten und Studentinnen, die von der Schule zu uns kommen, können zu wenig Mathematik.

Um das konkret zu machen: Zu Beginn meiner "Lineare Algebra"-Vorlesung an der TU Berlin im Herbst 2009 haben wir einen einfachen Eingangstest schreiben lassen. Nur etwa 50% der Studierenden, alle mit Mathematik als Hauptfach, konnten einfache Bruchrechenaufgaben lösen oder auch nur die Formel für Fläche und Umfang eines Kreises angeben, dessen Radius r gegeben ist. 84% konnten den Wert von π auf zwei Nachkommastellen genau angeben. (Die richtige Antwort lautet 3,14.) Das alles zeigt deutlich, dass unsere Mathematikstudenten nicht für ein Mathematikstudium vorbereitet sind — und auch nicht für ein anderes wissenschaftliches Fach. Und das heißt nicht nur, dass die Berliner Oberschulen nicht funktionieren: Unsere Studierenden kommen aus ganz Deutschland, und auch aus dem Ausland.

Ja, ich weiß, Sie haben diese Diagnose alle schon mal gehört, all das ist bedauerlich, es kann kompensiert werden, aber es ist nicht das Hauptproblem. Hier ist Problem Nummer zwei:

2. Problem: Unzureichender Wissensstatus

Die Studenten und Studentinnen, die von der Schule zu uns kommen, haben eine völlig unangemessene und unzureichende Vorstellung von ihrem eigenen Wissensstand.

Viele Studenten und Studentinnen, die ich prüfe, mündlich oder schriftlich, wissen einfach nicht, ob sie gut oder schlecht sind. Und sie liegen in beide Richtungen daneben: es gibt da Studierende, die glauben, sie hätten alles gemeistert, aber praktisch nichts verstanden haben. (Das beobachte ich insbesondere bei sehr selbstbewussten männlichen Studenten.) Und ich stoße immer wieder auf Studierende, die glauben, dass sie gar nichts wüssten oder könnten, aber in Wirklichkeit den Stoff sicher im Griff haben. (Das gibt es nicht nur bei Studentinnen.)

Und das ist ein ernstes Problem: Die Studierenden wissen nicht, was sie wissen. Sie wissen auch nicht, wie sie herausfinden können, ob sie etwas verstanden haben. Sie wissen nicht, wie viel sie wissen. Ihnen fehlt das Einschätzungsvermögen. Und als ein Ergebnis davon haben sie viel zu wenig, oder viel zu viel Selbstvertrauen.

Und es scheint so, dass dieses Problem über die letzten paar Jahrzehnte deutlich schlimmer geworden ist.

Nun folgt meine schwerwiegendste und weitreichendste Beobachtung:

3. Problem: Ungenügender Wissensrahmen

Die Studenten und Studentinnen, die von der Schule zu uns kommen, haben keine klare Vorstellung davon, "Was die Mathematik ist".

An dieser Stelle möchte ich aus einer Untersuchung des "Institute for Policy Studies in Education" an der London Metropolitan University zitieren. Sie hieß "Maths Images & Identities: Education, Entertainment, Social Justice", war von drei Soziologinnen verfasst und basierte unter anderen auf Umfragen unter Schülern und Studenten. Das nicht wirklich überraschende Ergebnis war, dass

„viele Schüler und Studenten die Mathematiker als ältere, weiße Männer aus der Mittelklasse sehen, die besessen sind von ihrem Fach, aber keine Sozialkompetenz haben und auch kein Privatleben außerhalb der Mathematik.

Die Ansichten der Schüler über die Mathematik enthielten einseitige und falsche Bilder, die sich oft auf Zahlen und elementares Rechnen beschränkten.“

Beide Ergebnisse sind schwerwiegend, und sie gehören zusammen: Die Mathematiker sind Teil dessen, was die Mathematik ausmacht.

Was ist Mathematik? Was stellen Sie sich darunter vor? Können Sie das formulieren?

Die Schüler von heute verlassen sich möglicherweise auf *Wikipedia* — und werden enttäuscht sein. In der Tat ist die Wikipedia-Beschreibung nicht sehr hilfreich. Ich übersetze:

Mathematik ist das Studium von Größen, Struktur, Raum und Veränderung. Mathematiker suchen nach Mustern, formulieren neue Vermutungen, und stellen Wahrheit fest durch systematische Ableitung aus geeignet gewählten Axiomen und Definitionen.

Die deutsche Version von Wikipedia geht sogar noch einen Schritt darüber hinaus: als Teil der Definition betont sie, dass es keine allgemein anerkannte Definition gäbe:

Die Mathematik [...] ist die Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die selbst geschaffene abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.

Ist das eine gute Antwort?

Wer Bildungspolitiker und -bürokraten fragt, wird wohl oft auf die Meinung stoßen, die Frage "Was Mathematik ist" werde durch die Lehrpläne hinreichend beantwortet. Aber was für eine Antwort geben die?

Wenn Sie dieselbe Frage an Universitätsmathematiker richten, dann werden die Sie möglicherweise auf ein klassisches und sehr erfolgreiches Buch von Richard Courant und Herbert Robbins verweisen, das den Titel "Was ist Mathematik?" trägt. Das ist aber eine Frage — was ist die Antwort? Das Buch "Was ist Mathematik?" sollte ursprünglich so in etwa "Mathematische Untersuchungen grundlegender elementarer Probleme für das allgemeine Publikum" heißen — bis dann Thomas Mann Richard Courant davon überzeugt hat, dass er mit dem Titel "Was ist Mathematik?" mehr Bücher verkaufen könne.

Solche "Untersuchungen grundlegender elementarer Probleme" können einem schon eine Vorstellung davon vermitteln, was Mathematik ist — aber eine umfassende Vorstellung? Ist das alles?

Was ist Mathematik? Die Mathematik hat meiner Meinung nach drei ganz verschiedene Seiten, die wir getrennt betrachten und teilweise auch getrennt *lehren* sollten:

Mathematik ist . . .

1. ein **Wissensgebiet** mit jahrtausendelanger Geschichte, Teil unserer Kultur, eine Kunst, aber auch aktuell produktiv, in der Tat ein Produktionsfaktor, Grundlage aller modernen Schlüsseltechnologien,
2. ein **Werkzeugkasten**: eine Sammlung von grundlegenden Hilfsmitteln, die für das Leben und den Erfolg in unserer hochtechnisierten, durchorganisierten und unübersichtlichen Welt überlebenswichtig sind — oder, um Harald Gschwindner, den Trainer des Basketballers Dirk Nowitzki, aus den *Mitteilungen der DMV* (3)18 (2010) zu zitieren: "Mathe ist einfach ein saugutes Werkzeug"! — und
3. ein hochentwickeltes, aktives, riesiges **Forschungsgebiet**.

4. Problem: Unzureichende Kenntnis der Aktivität "Mathematik-Machen"

Die Studenten und Studentinnen, die von der Schule zu uns kommen, haben kein hinreichendes Wissen darüber, was es heißt, "Mathematik zu machen".

Mathematik Machen heißt nicht, eine Zahl zu berechnen.

Mathematik Machen heißt nicht, eine Formel anzuwenden.

Mathematik Machen heißt nicht, eine Formel zu finden.

Was *tut* ein Mathematiker? Das ist eine hübsche, ergebnisoffene Ausgangsfrage für den Mathematikunterricht!

Wie kann man mit Mathematik Probleme lösen?

Zumindest kann man leicht beschreiben, wie Mathematiker *nicht* Probleme lösen:

1. Typischerweise lösen Mathematiker keine Probleme, indem sie einfach *eine Zahl berechnen*, die dann die Antwort ist. (Die Behauptung — aus der Science Fiction-Parodie “Per Anhalter durch die Galaxis” — dass die Zahl 42 die Antwort auf alle Fragen darstelle, ist britischer Humor, der offenbar in Deutschland oft nicht verstanden oder eben zu ernst genommen wird.)
2. Typischerweise lösen Mathematiker keine Probleme, indem sie einfach *eine Formel anwenden*, oder *eine Formel entdecken* die das Problem löst. (Zeitungsartikel, die anfangen mit “Mathematiker haben eine Formel entdeckt für ...” sind fast immer Unsinn.)
3. Typischerweise lösen Mathematiker keine Probleme, indem sie für die Realität “ein mathematisches Modell konstruieren, das dann mit mathematischen Methoden gelöst werden kann”. In jeder realistischen Situation, in Naturwissenschaften oder Technik ist der Prozess der Modellbildung, der Parameteranpassung, des Hinzufügens von Bedingungen und Nebenbedingungen, der Entdeckung von versteckten Seitenbedingungen usw. lang, und muss durch viele Iterationen gehen, bevor überhaupt irgendwas Sinnvolles und Nützliches dabei rauskommt. In diesem Prozess werden typischerweise große Mengen von Papier, Bleistiften, Radiergummis, Kreide, Computerzeit und Kaffee verbraucht — und dies sehr lange ohne sichtbaren Erfolg. Und die Problemlösung ist auch nie ganz abgeschlossen. Siehe zum Beispiel das Problem “Wetterbericht für übermorgen.”

Trotzdem löst Mathematik Probleme, sie trägt zum Wissen bei, und sie liefert Schlüsseltechnologien für fast alle Lebensbereiche. *Wie* das funktioniert, kann ich hier schon aus Zeitgründen nicht beschreiben, aber auch deshalb, weil der Prozess komplex ist: mathematische Methoden werden in der Physik, Chemie, Biologie, und in anderen Naturwissenschaften eingesetzt, aber auch in Ingenieurwissenschaften und Architektur, und in Wirtschaft und Industrie. *Welche* mathematischen Werkzeuge jeweils nützlich sind und gebraucht werden, ist genauso unterschiedlich wie die Wege der Mathematik in die Praxis. Wichtig sind dabei unter anderem mathematische *Modellbildung*, *Abstraktion*, Rückgriff auf analoge/bekanntere mathematische *Strukturen*, aber auch spezifische Weiterentwicklung und ausdifferenzierung von Theorien und Ergebnissen, *Algorithmenentwicklung*, *Fehlerabschätzung* in Hinblick auf Numerik wie auf die vorhandenen Daten, *Modellverifikation*, *Komplexitätsabschätzung*, Implementierung, und so weiter. Dabei geht vielfältige Mathematik ein in einen oft sehr komplizierten, immer wieder rückgekoppelten Prozess.

Mathematik kommt an in der industriellen Praxis: Große Teile der Wirtschaft und Industrie kann man heutzutage mit vollem Recht als “Mathematische Industrie” bezeichnen: Industriebereiche, in denen mathematische Methoden essentiell im Design, der Optimierung und der Produktion verwendet werden. Das sind nicht nur Finanzindustrie, Telekommunikation und Logistik, sondern auch fast alle anderen großen Industriebereichen. Denken Sie darüber nach — und vermitteln Sie das den Kindern in der Schule. Die müssen einen Eindruck davon bekommen, dass da Mathematik großen, entscheidenden Anteil am Erfolg hat, dass die Industrierfolge Ergebnisse von “Mathematik Machen” sind. Und das muss einen wichtigen Beitrag liefern zur Antwort auf die Frage “Was ist Mathematik?”.

Lassen Sie mich als Antwort auf diese vier Defizite eine Agenda für den Mathematikunterricht formulieren:

2 Ein Schulfach Mathematik reicht nicht — wir brauchen drei.

Mathematik I: Wissensgebiet

Wo kommt das Gebiet eigentlich her? Die Antwort auf diese Frage besteht aus 6000 Jahren (oder sogar 22000 Jahren) Geschichte voller Geschichten, Entwicklungen, Verwicklungen, Entdeckungen, Irrtümern, Erfolgen und Motivation. Dieser Teil des Mathematikunterrichts verlangt eine enge Vernetzung mit Physik und Astronomie.

Die Tatsache, dass die Mathematik eben nicht nur eine Liste von Regeln ist, und auch keine fertige und abgeschlossene Sache, dass sie Geschichte hat, dass die Geschichte weitergeht, und dass es auch aktuelle Geschichten dazu gibt, ist wichtig für das Bild von "Was ist Mathematik?" — und es ist eine Gelegenheit, *wirkliche Helden* zu treffen, und *Geschichten* zu erzählen über Archimedes, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß, Sonja Kovalevskaya, Andrew Wiles, Grigorij Perelman, Terence Tao oder Lisa Sauermann, die das Bild davon mitbestimmen sollten, worum es in der Mathematik geht. (Und die *viel* interessanter sind als Bruchrechnung oder quadratische Gleichungen.)

Da wird auch Mathematik plötzlich eine Wissenschaft, die durch Frauen angeführt wird: Es hat ja immer noch keine Frau eine Fields-Medaille bekommen, aber seit Anfang 2011 sind vier Frauen die Präsidentinnen der vier wichtigsten Weltverbände der Mathematik — unter ihnen die Belgierin Ingrid Daubechies, die erste Präsidentin der International Mathematical Union, Marta Sanz Soulé aus Barcelona als erste Präsidentin der Europäischen Mathematischen Gesellschaft EMS und Barbara Lee Keyfitz von der Ohio State University, als erste Präsidentin des International Council for Industrial and Applied Mathematics ICIAM.

Mathematik I ist auch der Bereich, in dem wir Mathematik mit anderen Künsten verbinden können — die Schülerinnen und Schüler können Mathematik *erfahren* und *erleben*. Es muss *sichtbar* werden, dass Mathematik eine *lebendige* Wissenschaft ist!

Teil der "Mathematik als Wissensgebiet" muss auch eine Vielzahl von Antworten auf die Schülerfrage sein, „*wozu denn das gut ist*“. Viele Schülerinnen und Schüler brauchen das als Teil ihrer Motivation dafür, Mathematik zu lernen. Sie wissen ja, dass Mathematik in vielen Schlüsseltechnologien drin steckt. Aber die Schüler müssen das hören, sie müssen es erzählt bekommen! Sie sollten damit in Berührung kommen, und zwar so konkret wie möglich. Probieren Sie es aus! Wenn möglich mit echten Problemen, mit realen Daten!

Mathematik II: Werkzeuge

Natürlich muss es ein Hauptziel von Mathematikunterricht in der Schule sein, *alle* Schülerinnen und Schüler mit grundlegendem Mathematik-Wissen und grundlegenden mathematischen Fähigkeiten auszustatten. Wenn wir ehrlich sind, braucht man *aktiv* gar nicht so viel Mathematik im täglichen Leben. Zahlen und Grundrechenarten gehören dazu, die werden gebraucht, geometrische Formen, Wahrscheinlichkeiten, Prozentrechnung — aber sonst nicht viel mehr. Oder wann haben Sie zum letzten Mal eine quadratische Gleichung lösen müssen? Eine Funktion abgeleitet?

Mein Eindruck ist jedoch, dass dieser Teil (also aktives Wissen über Mathematik des 17. Jahrhunderts — genau das sind ja die Differential- und Integralrechnung und die Zirkelkonstruktionen aus der Schule) die Lehrpläne in vielen Ländern dominiert, und dann wenig Platz für anderes lässt, etwa für passives Wissen bis ins 21. Jahrhundert. Gleichzeitig scheitert die Umsetzung eines Minimums von wirklich dringend benötigtem mathematischem Rüstzeug im Unterricht dramatisch. Das hat natürlich viele verschiedene Gründe, aber einer dieser Gründe ist fehlende Motivation, und die kommt daher, dass die Kinder an Mathematik II allein nicht interessiert sind, wenn nicht Mathematik I und III dazukommen.

Mathematik III: Forschungsgebiet

Auch davon muss im Schulunterricht die Rede sein! Man kann “mathematische Forschung” nicht allen Schülern beibringen, aber man muss ihnen erzählen, dass sie existiert! Dass Mathematik lebendig ist, dass sie sich stetig weiterbewegt und verändert. Dass sie ein riesiges Gebiet ist, das sich immer weiter verändert! Dass da Dutzende fantastischer Themengebiete dazugehören, die in der Schule nicht weiter thematisiert werden können, wie die Topologie, Ergodentheorie, Maßtheorie, Gruppentheorie, Galoistheorie, Liethorie, etc. Dass es aber auch für Schülerinnen und Schüler Gelegenheiten zum Knobeln, Entdecken und Forschen gibt — siehe *Haus der kleinen Forscher*, *Schüler experimentieren* und *Jugend forscht*! Bei all diesen Aktivitäten und Wettbewerben ist Mathematik dabei und willkommen!

Auch ein Teil von Mathematik III: **Vorbereitung für die Universität!** Unter diese Überschrift gehören nicht nur spezifisch-mathematische Inhalte, sondern zunächst das *systematische Argumentieren*, das *saubere Formulieren* (also Fähigkeiten, die nicht nur für ein Mathematikstudium essenziell sind, sondern auch für Jura, die Politik oder die Philosophie). Und weiter gehören dazu *Beweise* und *Problemlösestrategien*. Auch das ist für ein Mathematikstudium unabdingbar, aber nicht nur. Und nebenbei sind das auch Grundfähigkeiten für die Beschäftigung mit Mathematikwettbewerben, die ja ein wunderbares “Trainingsgelände” für mathematische Fähigkeiten, aber auch für Ausdauer und Ehrgeiz sind. Und die gibt es ja glücklicherweise auf sehr verschiedenen Ebenen und in vielen verschiedenen Formen, von “Känguru der Mathematik” (für *alle* Kinder) bis zur Internationalen Mathematikolympiade (für nur sehr wenige).

Mathematik III muss Grundlagen für den Einstieg in Mathematik als Forschungsgebiet vermitteln. Dazu gehören die grundlegenden *Konzepte*, die man braucht, um sich im Studium zurechtzufinden, *Aussagenlogik*, Konzepte wie *Funktionen*, *Wahrscheinlichkeiten*. Natürlich wünschen wir uns, dass alle schon in der Schule *Trigonometrie*, *Vektorrechnung* und zumindest die Anfänge der *Analysis* gesehen und verstanden haben — aber noch viel wichtiger sind *Beweise*!

Zusammenfassung: Viele Themen, Bewegliche Ziele

Wenn wir uns einmal vorstellen, wie wir Mathematikunterricht für die Schule konzipieren würden, wenn wir die Möglichkeit für einen Neuanfang hätten. Dann stünde sofort eine große Vielfalt von Themen auf der Agenda — der Mathematikunterricht muss ein **Kaleidoskop der Mathematik** präsentieren:

- ein riesiges Wissensgebiet mit seinen Anwendungen,
- grundlegende Werkzeuge, und
- die Wissenschaft als Studienziel.

Ein sinnvolles Konzept muss die Frage beantworten “Welche Aspekte der Mathematik, welche Fakten, Komponenten und Fähigkeiten vermitteln wir welchen Schülern — und warum”. Meine Kurzfassung, um einen Aufschlag zu machen:

- Das Wissensgebiet — Geschichte, Geschichten, Anwendungen, Übersicht sind wichtig für die Motivation, als Bildungsziel — für alle!
- Grundlegende Werkzeuge braucht jedes Kind.
- Die Wissenschaft — auch davon müssen wir allen erzählen, aber die Vorbereitung für ein Studium oder für andere Ausbildungs- und Karrierewege müssen natürlich soweit möglich und nötig angepasst werden an Vorbildung, Talent und Ehrgeiz.

Natürlich muss all dies *auf viele verschiedene Weisen* passieren: Im Schulunterricht muss Zeit sein

1. für's Erklären, Üben, Lernen und Wiederholen,

2. für's Fragen, für die Suche nach Antworten, für's Begründen, für's Entdecken von Regeln und
3. für's Erkunden, Spielen, für Geschichten und für den Wettbewerb.

Weil wir es bei der Mathematik mit einem *dynamischen* Gebiet zu tun haben, das sich entwickelt und bewegt, haben wir es mit **beweglichen Zielen** zu tun:

- Die Mathematik verändert sich ständig,
- Der Schulunterricht und die Studieninhalte müssen das reflektieren.

Wir werden natürlich beim Mathematikunterricht wie auch an der Univeristät keinen radikalen Neustart machen können, obwohl das reizvoll sein könnte — aber wir können versuchen, ihn zu verändern in Hinblick auf die Antwort, die er gibt auf die Frage “Was ist Mathematik?”.

Prof. Günter M. Ziegler
ziegler@math.fu-berlin.de
<http://page.mi.fu-berlin.de/gmziegler/>

Netzwerkbüro Schule – Hochschule der DMV
<https://dmv.mathematik.de/schulthemen/netzwerkbuero.html>

Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 2
14195 Berlin

Ich danke Andreas Loos, Stephanie Schiemann, Thomas Vogt und Robert Wöstenfeld für wertvolle Diskussionen und Hinweise.